



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO



Simetrías asintóticas

-en electromagnetismo en el cono de luz-

e-print: [arXiv 2301.xxxx](https://arxiv.org/abs/2301.xxxx) [hep-th]

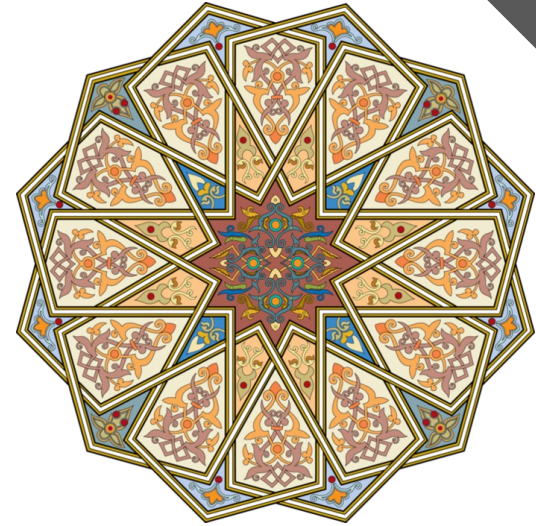
Oriana Labrin Zapata

Tutores: Olivera Mišković (PUCV)
y Hernán González (UAI)

Seminario de investigación - 12 de diciembre, 2022

¿QUÉ ES UNA SIMETRÍA?

Invarianza bajo transformaciones



¿SECTOR ASINTÓTICO?

Comportamiento en el límite

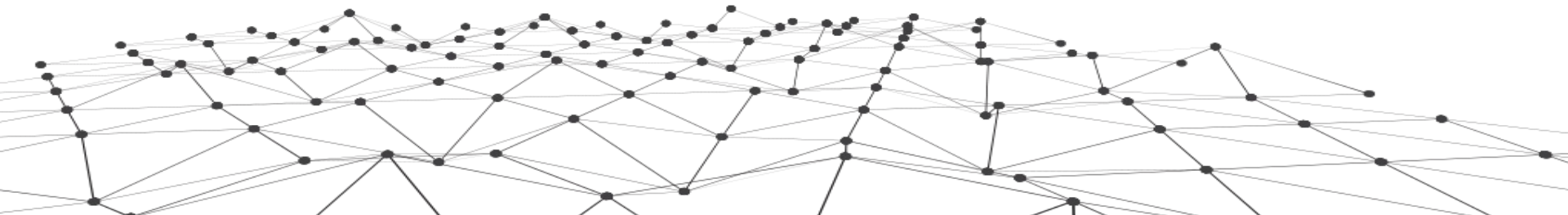
$$\lim_{r \rightarrow \infty} f(r)$$

MOTIVACIÓN

Simetrías tienen una implicancia física de gran relevancia, están asociadas a cargas conservadas, por el teorema de Noether.

Electromagnetismo es una teoría bien conocida, con simetría abeliana $U(1)$ responsable de la carga eléctrica. Pero, ¿Qué hay del sector asintótico? Queremos explorar las simetrías en el borde del cono de luz.

El procedimiento de Dirac en el formalismo hamiltoniano provee el método de calcular las simetrías que existen. [Dirac, 1964]



FORMALISMO HAMILTONIANO

- EN TEORÍA DE CAMPOS -

En el formalismo hamiltoniano se introducen las variables de momento Π^μ :

$$\Pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{A}_\mu}$$

Método de Dirac: Si la relación entre Π^μ y \dot{A}_μ no es invertible tenemos funciones de las variables canónicas del tipo

$$\varphi(A_\nu, \Pi^\mu) \approx 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} -\text{Generadores de simetría} \\ -\text{Reducción de grados de libertad} \end{array} \right.$

Que se denominan Vínculos

El Hamiltoniano viene dado por

$$H_T = \Pi^\mu \dot{A}_\mu - L + \lambda^a \varphi_a$$

Con los corchetes canónicos

$$[A_\mu, A'_\nu] = [\Pi^\mu, \Pi'^\nu] = 0, [A_\mu, \Pi'^\nu] = \delta_\mu^\nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

LISTA DE CONTENIDOS

01.

**ELECTROMAGNETISMO
USUAL**



02.

**SISTEMA DEL
CONO DE LUZ**



03.

**MOMENTOS
CANONICOS**



04.

**GENERADORES
DE SIMETRÍAS**



05.

**SIMETRÍAS LOCALES
Y ASINTÓTICAS**



06.

**CARGAS
Y ALGEBRA**





01.

ELECTROMAGNETISMO

En electromagnetismo, el campo fundamental es el **potencial electromagnético** A_μ . Sin embargo, los campos eléctrico y magnético son elementos de la matriz de la fuerza del campo $F_{\mu\nu}$, que nos permite escribir la densidad lagrangiana

$$L = -\frac{1}{4} \int dx^3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

En el espacio Minkowski en coordenadas cartesianas. Donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Maxwell dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

Los momentos canónicos son: $\Pi^\mu = -F^{0\mu}$

Notemos que el momento $\Pi^0 = -F^{00} = 0$

¡Encontramos nuestro primer vínculo!

$$\Pi^0 = 0$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Note: A yellow box highlights the first row of the matrix, with an arrow pointing to the label $F_{0\mu}$ above it.



01.

ELECTROMAGNETISMO

Imponiendo la conservación del vínculo en el tiempo

$$\dot{\Pi}^0 = [\Pi^0, H_T] = 0$$

El resultado es

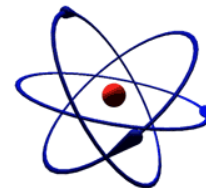
$$\underbrace{\partial_i \Pi^i = 0}_{\text{Vínculo}} \longrightarrow \partial_i F^{0i} = 0 \longrightarrow \underbrace{\partial_i E^i = 0}_{\text{Ley de Gauss}} \quad i = 1, 2, 3$$

Finalmente, encontramos 2 vínculos. Ahora nos preguntamos...

¿Son generadores de simetría o solo reducen los grados de libertad?

La respuesta: Son **generadores de simetría**. Y no cualquier simetría, sino la simetría bajo transformaciones de Gauge U(1).

La cantidad conservada se puede derivar, y es la **carga eléctrica**.





02.

SISTEMA DE REFERENCIA

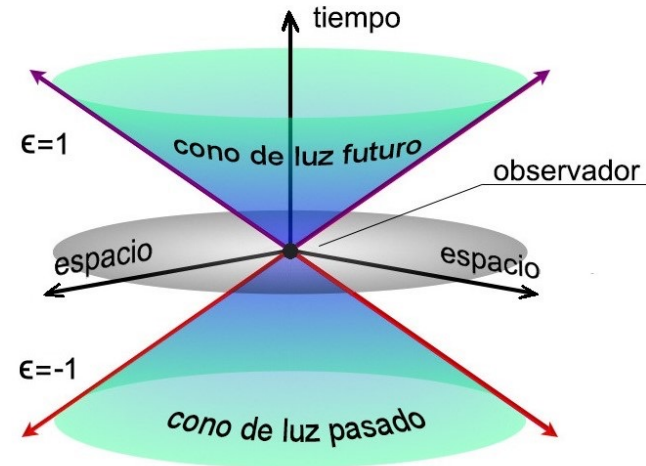
- CONO DE LUZ -

Queremos buscar simetrías el borde del cono de luz. Por ello, consideramos el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) .

Introduciendo la nueva coordenada temporal

$$u = t - \epsilon r, \quad \epsilon = \{-1, 1\}, \quad \epsilon \propto \frac{v}{c}$$

- $\epsilon < 1$ sistema de referencia de la partícula masiva.
- $\epsilon = -1$ o 1 sistema de referencia de la luz: corresponde al tiempo retardado y avanzado.



En las coordenadas del cono de luz, $\epsilon = -1, 1$ corresponde al tiempo retardado y avanzado, respectivamente



02.

SISTEMA DE REFERENCIA

- CONO DE LUZ -

El elemento de línea cuadrado está dado por

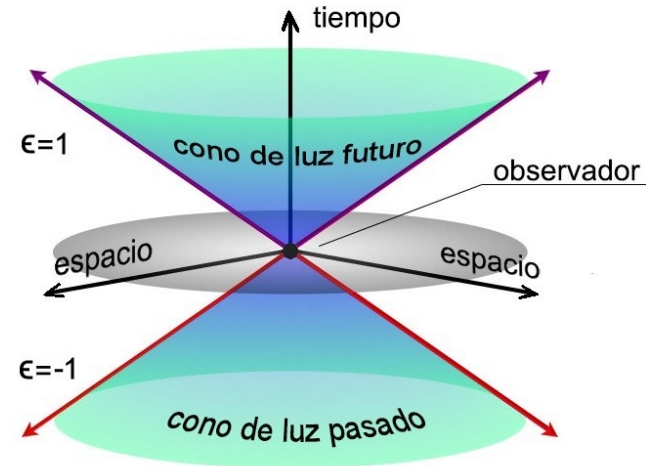
$$ds^2 = -du^2 - 2\epsilon dudr + (1 - \epsilon^2)dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Con la notación para la 2-esfera

$$d\Omega^2 = \gamma_{AB}(\Phi)d\Phi^A d\Phi^B, \quad \Phi^A = (\theta, \varphi)$$

La electrodinámica es descrita por la acción

$$I = -\frac{1}{4} \int d^4x r^2 \sqrt{\gamma} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$



En las coordenadas del cono de luz, $\epsilon = -1, 1$ corresponde al tiempo retardado y avanzado, respectivamente



03. MOMENTOS CANÓNICOS

Con el fin de pasar al formalismo hamiltoniano, definimos los momentos canónicos en las coordenadas del tiempo retardado

$$\Pi^\mu = -r^2 \sqrt{\gamma} F^{u\mu}$$

En componentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi^u = 0 \\ \Pi^r = -r^2 \sqrt{\gamma} F^{ur} \\ \Pi^A = -\sqrt{\gamma} \gamma^{AB} [(\epsilon^2 - 1) F_{uB} - \epsilon F_{rB}] \end{array} \right.$$

- Cuando $\epsilon < 1$ la velocidad \dot{A}_B puede ser expresada en términos de Π^A , y todo es igual al caso presentado en el inicio.
- Cuando $\epsilon^2=1$, esto no es posible y la relación que envuelve a Π^A se convierte en un [NUEVO VÍNCULO.](#)



03. MOMENTOS CANÓNICOS

En este caso, tenemos los siguientes vínculos:

$$\Pi^u = 0$$

$$\partial_i \Pi^i = 0$$

$$\chi^A = \Pi^A - \epsilon \sqrt{-\gamma} \gamma_{AB} F_{rB}$$

Simetría local U(1)

NUEVO VÍNCULO

First order gravity on the light front

Sergei Alexandrov^a and Simone Speziale^b

^aLaboratoire Charles Coulomb, CNRS UMR 5221, Université Montpellier 2, F-34095
Montpellier, France

^bCentre de Physique Théorique, CNRS-UMR 7332, Luminy Case 907, 13288 Marseille, France



04. GENERADORES DE SIMETRÍA

$$\chi^A = \Pi^A - \epsilon \sqrt{-\gamma} \gamma_{AB} F_{rB}$$

Generador de simetría

$$\{\chi^A, \chi'^B\} = \Omega^{AB} = 0$$

Corchetes de Poisson
igual a matriz simpléctica
no invertible

?

Reducción de grados
de libertad

$$\{\chi^A, \chi'^B\} = \Omega^{AB}$$

Corchetes de Poisson
igual a matriz simpléctica
invertible



04. GENERADORES DE SIMETRÍA

$$\chi^A = \Pi^A - \epsilon \sqrt{-\gamma} \gamma_{AB} F_{rB}$$




$$\{\chi^A, \chi'^B\} = \Omega^{AB}$$

Reducción de grados
de libertad

El **vínculo nuevo** parece no relacionarse con simetrías. Sin embargo, podemos buscar los modos cero de la matriz con el fin de encontrar generadores de simetría.

$$0 = \int d^3 x' \Omega^{AB}(x, x') V_B(x') = -2\epsilon \sqrt{-\gamma} \gamma_{AB} \partial_r V_B$$

 r -independiente



04. GENERADORES DE SIMETRÍA

Ya que nuestro nuevo vínculo se preserva en el límite $r \rightarrow \infty$, podemos hacer una expansión asintótica de los campos.

$$A_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{(n)\mu}(\mathbf{u}, \Phi^A)}{r^n}, \quad \Pi^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi_{(n)}^\mu(\mathbf{u}, \Phi^A)}{r^n}$$

Podemos escribir el **generador de simetría asintótica**, en función de dicha expansión

$$\chi_{(0)}^A = \Pi_{(0)}^u - \epsilon \sqrt{-\gamma} \gamma_{AB} F_{(0)rB}$$

Note que para $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, los campos no dependen de r , por lo tanto este término sobrevive cuando $r \rightarrow \infty$.



04. GENERADORES DE SIMETRÍA

Considerando el espacio de fase completo, podemos definir los generadores como

$$\left\{ \begin{array}{l} G[\theta] = \int d^3x (\theta_u \Pi^u - \theta \partial_i \Pi^i) \quad \text{Aparece en EM usual} \\ S[\eta] = \int d^3x \chi^A \eta_A \quad \text{Aparece sólo en sector radiativo} \end{array} \right.$$

Donde $\eta_A = \eta_A(\mathbf{u}, \Phi)$

Con estos generadores podemos conocer cual es la simetría de nuestra teoría radiativa. Es decir, cuales son las transformaciones que dejan cierta cantidad conservada



05. SIMETRÍAS LOCALES Y ASINTÓTICAS

Las transformaciones de los campos vienen dadas por:

Transformaciones locales U(1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\theta} A_{\mu} = \{A_{\mu}, G[\theta]\} = \theta_u \delta_{\mu}^u - \partial_i \theta \delta_{\mu}^i \\ \delta_{\theta} \Pi^{\mu} = \{\Pi^{\mu}, G[\theta]\} = 0 \end{array} \right.$$

Transformaciones
Gauge

Invarianza de campo
Eléctrico

Transformaciones asintóticas

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\eta} A_{\mu} = \{A_{\mu}, S[\eta]\} = \eta_A \delta_{\mu}^A \\ \delta_{\eta} \Pi^{\mu} = \{\Pi^{\mu}, S[\eta]\} = \epsilon \delta_r^u \sqrt{\gamma} \nabla^A \eta_A \end{array} \right.$$



06.

CARGAS Y ALGEBRA

Queremos asegurarnos que nuestros generadores sean diferenciables [Regge-Teitelboim,1974], por ello definimos lo siguiente

$$G_Q[\theta] = G[\theta] + Q_e[\theta]$$

$$G_Q[\theta] = \int d^3x \left(\frac{G_Q[\theta]}{\delta A_\mu} \delta A_\mu + \frac{G_Q[\theta]}{\delta \Pi^\mu} \delta \Pi^\mu \right)$$

$$S_Q[\eta] = S[\eta] + Q_s[\eta]$$

↳ Término de borde

$$S_Q[\eta] = \int d^3x \left(\frac{S_Q[\eta]}{\delta A_\mu} \delta A_\mu + \frac{S_Q[\eta]}{\delta \Pi^\mu} \delta \Pi^\mu \right)$$

Donde la diferenciable de $S[\eta]$ y $G_Q[\theta]$ puede asegurarse con los términos de borde $Q_e[\eta]$ y $Q_s[\eta]$, la carga eléctrica y la **carga asintótica**.



06.

CARGAS Y ALGEBRA

Finalmente, las cargas conservadas son

$$Q_e[\theta] = - \int d^2\Phi \theta \Pi^r$$

Carga eléctrica

$$Q_s[\eta] = \epsilon \int d^2\Phi \sqrt{\gamma} \eta^A A_A$$

Super traslación angular

Se puede demostrar que el álgebra $\{Q_e[\theta_1], Q_e[\theta_2]\} = \{Q_s[\eta_1], Q_s[\eta_1]\} = 0$ Es Abelian

Mientras que el álgebra mixta tiene una **extensión central**

$$\{Q_e[\theta], Q_s[\eta]\} = \epsilon \int d^2\Phi \sqrt{\gamma} \eta^A \partial_A \theta$$

Resultado nuevo, no conocido anteriormente en la literatura



06.

CARGAS Y ALGEBRA

$$\{Q_e[\theta], Q_s[\eta]\} = \epsilon \int d^2\Phi \sqrt{\gamma} \eta^A \partial_A \theta$$

Esta **extensión central** es un número que conmuta con todos los generadores

Hemos encontrado que $Q_e[\theta]$ y $Q_s[\eta]$ son pares canónicos conjugados.

Ejemplo: $\{q, p\} = 1$ en mecánica clásica, y $\{q, p\} = i\hbar$ en mecánica cuántica.

Su interpretación física esta bajo estudio

DISCUSIONES

- *Aparición de nuevo vínculo*
- *Generador de simetría de carácter holográfico*
- *Importancia de una extensión central*
- *Modos de Goldstone*

REFERENCIAS

A. Strominger, "Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory," [arXiv:1703.05448 [hep-th]].

M. Banados, "Global charges in Chern-Simons field theory and the (2+1) black hole," Phys.Rev. D **52** (1996), 5816-5825 [arXiv:hep-th/9405171 [hep-th]].

J. D. Brown and M. Henneaux, "Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity," Commun. Math. Phys. **104** (1986), 207-226

S. Alexandrov and S. Speziale, "First order gravity on the light front", Phys. Rev. D **91**, 064043 (2015), [arXiv:1412.6057 [gr-qc]].

P. A. M. Dirac, "Lectures on quantum mechanics". (1964)

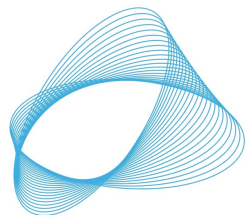
T. Regge, "Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity", Annals of Physics. Volume 88, Issue 1 (1974), 286-318.

AGRADECIMIENTOS

Doy las gracias a todos los familiares y amigos que me apoyaron de forma incondicional, y a los profesores que me guiaron en este proceso. En especial a mis tutores Olivera y Hernán por su tiempo y paciencia.

Igualmente agradezco a las becas que financiaron mis estudios y esta investigación:

- Gratuidad
- Proyecto ANID/ACT210100 ANILLO “Holography and its applications to high energy physics, quantum gravity and condensed matter systems”
- FONDECYT N°11190427 “The role of boundary modes in the quantum description of gravity” y N°1190533 “Black holes and asymptotic symmetries”
y el proyecto
- DI PUCV N°123.764.



HOLOGRAPHYCL

ACT/210100



¡GRACIAS!