

Seminario de Investigación, 12 de diciembre 2022

Cielo Estela Ramírez de Arellano Torres

Profesores guía: Olivera Miskovic, PUCV. Rodrigo Olea, UNAB

Defectos Cónicos

y su aplicación a Física de Agujeros Negros



PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO



HOLOGRAPHYCL

ACT/210100

Preguntas a responder



¿Por qué estudiar conos?



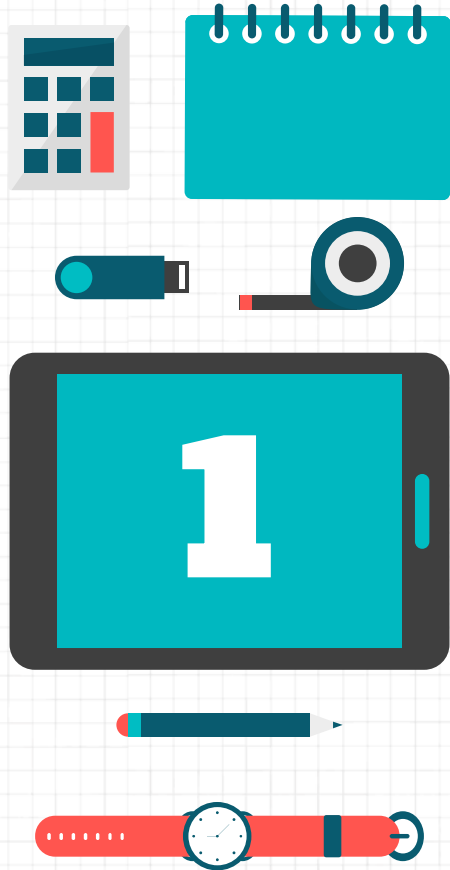
¿Cómo trabajamos con ellos?

¿Qué son los defectos cónicos?



¿Cómo aplicarlos a un agujero negro?



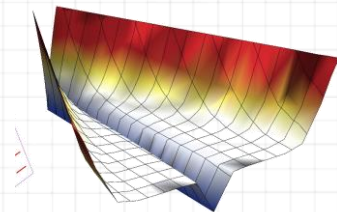
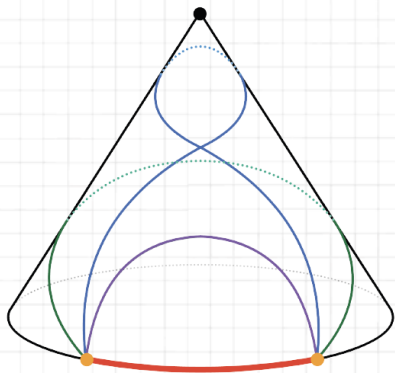


**¿Por qué
estudiar
conos?**

Motivación: Algunas aplicaciones

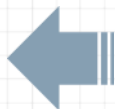
Materia Condensada

Los defectos cónicos modelan **esquinas 1+1 dim en espacios 3+1 dim**. Imagen: "2D Electron Gas in Polar Semiconductor Wedges" (Bhasker, et al. 2016)



Holografía

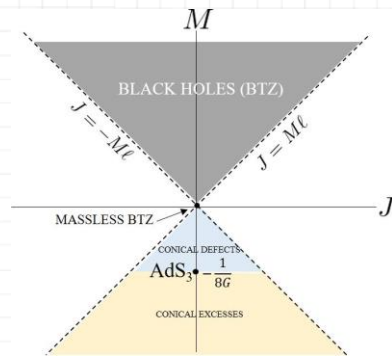
La **holografía cónica** describe una dualidad entre una teoría de gravedad D dim y una de campos en $(D-2)$. Imagen: "Aspects of Holography in Conical AdS_3 " (Berenstein, et al. 2022)



Motivación: Algunas aplicaciones

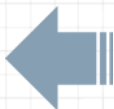
Agujeros Negros

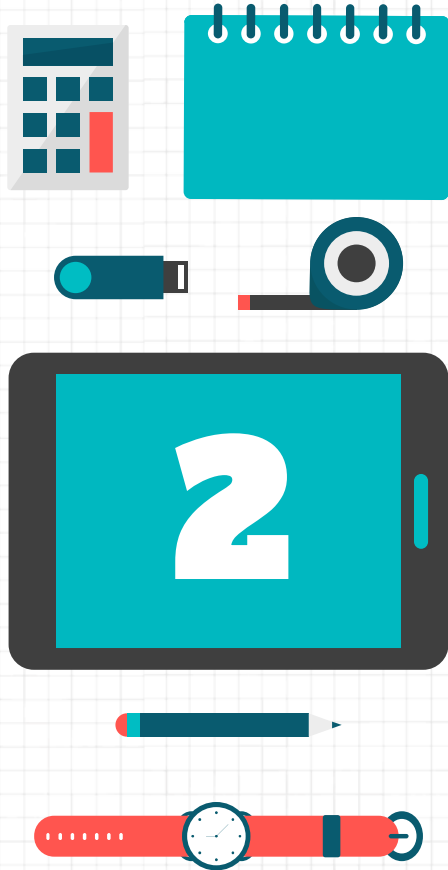
Existe una relación entre la **entropía de un agujero negro** y el déficit angular del espacio tiempo (BTZ, 1993). Imagen: “*Asymptotic dynamics of three-dimensional gravity*” (Donnay, 2016).



Caso contrario: superávit angular

Corales hiperboloides tejidos a crochet. Ejemplo de geometría con **superávit angular**. (Fuente: [Institute For Figuring](#))

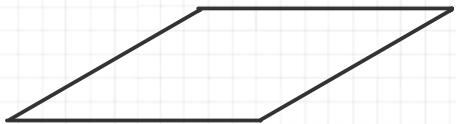




**¿Qué son
los defectos
cónicos?**

Sobre el cono bidimensional

Plano 2 dim



¡Localmente equivalentes!

Cono 2 dim

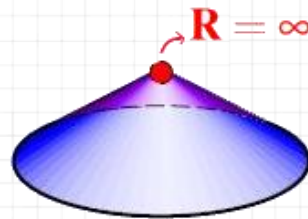


Imagen por cortesía de nLab

¿Cuál es la diferencia?

El cono, a diferencia del plano, posee un punto de curvatura infinita $R = \infty$ en su ápice. Este punto es lo que se conoce por **singularidad cónica**.

Sobre el cono bidimensional

Para construir un cono, recortaremos un sector circular del espacio polar definido por un ángulo $2\pi\alpha$, donde $\alpha \in [0,1]$ es llamado **déficit angular**.

Se define la **codimensión** de un subespacio como la diferencia entre su dimensión y el del espacio que lo contiene.

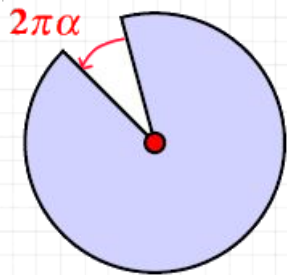
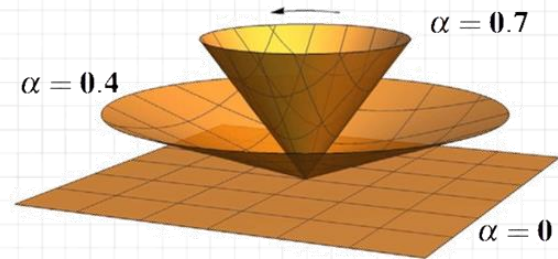
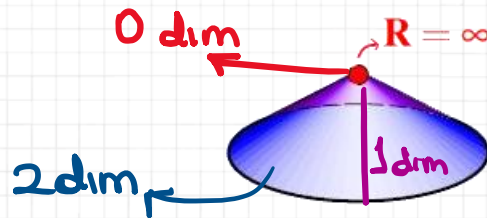


Imagen por cortesía de nLab



(Prokhorov, et al. 2019)

$$2 \text{ dim} - 0 \text{ dim} = 2 \text{ dim}$$

La **singularidad** es de **codimensión 2**.

Definición de defecto cónico

Llamaremos **defecto cónico** a toda variedad de codimensión 2 en donde la curvatura sea cónicamente singular.

¿Por qué se hace el énfasis en **cónicamente singular**?

Singularidad
cónica



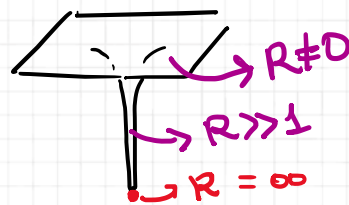
La curvatura del defecto es proporcional a una **delta de Dirac**: $R \sim \delta(\Sigma)$



Otras
singularidades



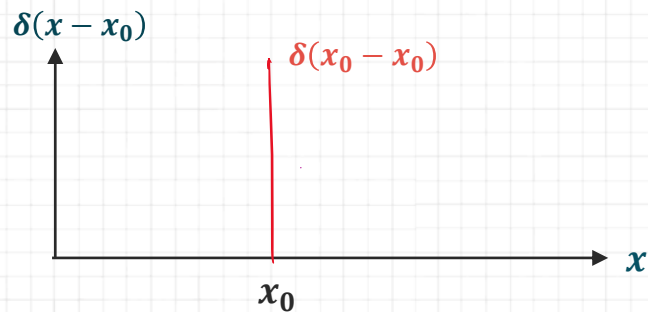
La curvatura crece de forma continua cuando $r \rightarrow 0$: $R \sim \frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \dots$



Distribución de Delta de Dirac

Una distribución de tipo delta de Dirac se define como

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_0 \\ \infty & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$



Y por definición se cumple que

$$\int_V d^D x \delta^D(\vec{r} - \vec{r}_0) \Psi(\vec{r}) = \Psi(\vec{r}_0), \quad \forall \Psi(\vec{r})$$

Distribución de Delta de Dirac

Estas pueden construirse a partir de funciones dependientes de **parámetros que replican su comportamiento** en un límite. Por ejemplo

$$f_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{|\varepsilon|\sqrt{\pi}} e^{-(x/\varepsilon)^2}$$

De inmediato se ve que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \neq 0 \\ \infty & \text{si } |x| = 0 \end{cases} = \delta(x)$$

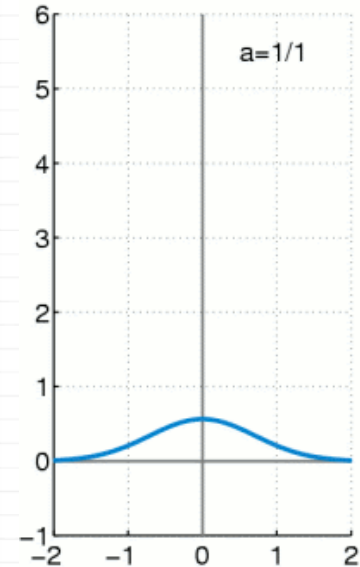


Imagen por cortesía de Wikipedia.

Sobre el cono: Métrica

El espacio-tiempo de un cono vendrá definido por la siguiente métrica

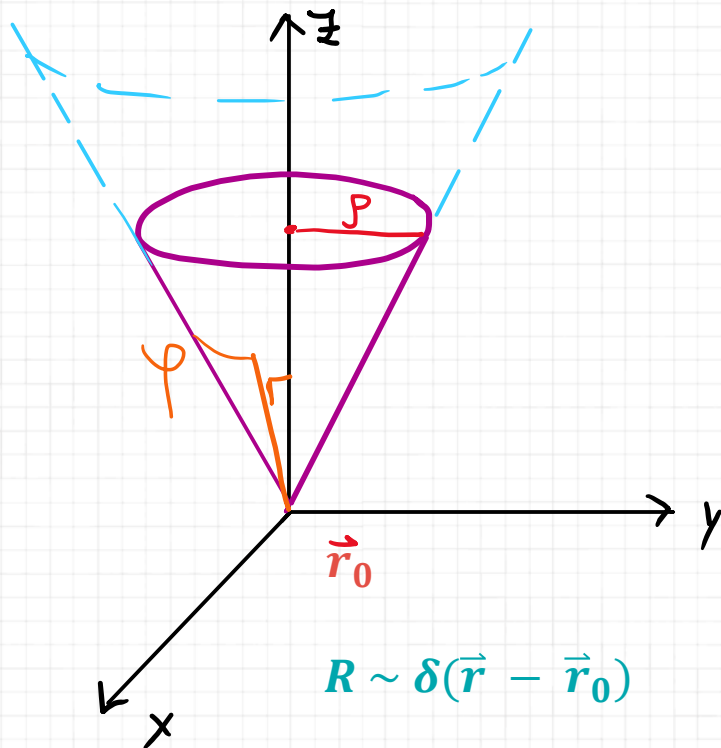
$$ds^2 = (dr^2 + r^2 d\varphi^2)$$



$$\varphi \in [0, 2\pi(1 - \alpha)]$$

Como el tamaño del cono es infinito, se puede multiplicar por un factor conforme.

$$ds^2 = e^\sigma (dr^2 + r^2 d\varphi^2)$$



Generalización a D dimensiones

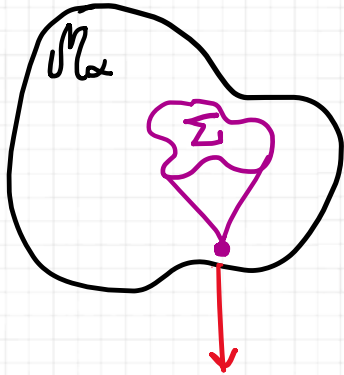
Cono 2 dim inserto en un espacio D dimensional.

Nos enfocaremos en esta de aquí en adelante.

$$ds^2 = e^\sigma [dr^2 + r^2 d\varphi^2 + (\gamma_{ij}(\theta) + \rho^2 h_{ij}(\theta) + \dots) d\theta^i d\theta^j]$$

Bloque singular
(contiene al defecto)

Bloque regular (no contiene al defecto).
No es necesariamente plano.



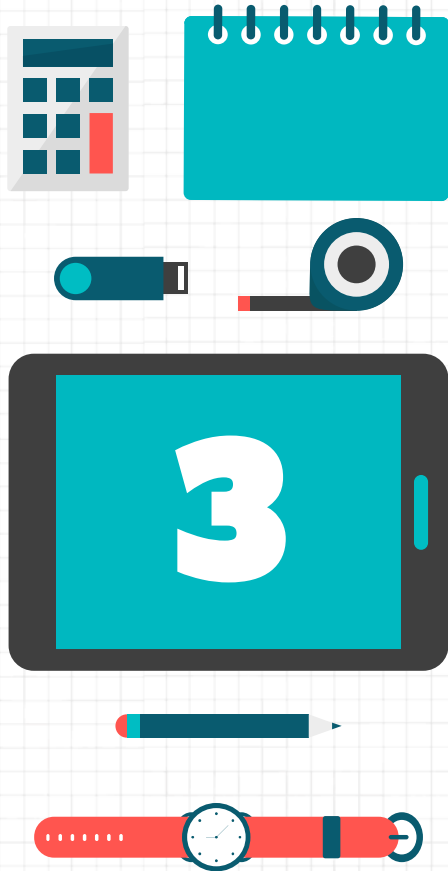
CERCA DE LA SINGULARIDAD

$$\mathcal{M}_\alpha \approx \mathbb{R}^2 \times \Sigma$$

↓ ↓
cono parte
2-dim regular

$$R \sim \delta(\vec{r} - \vec{r}_\Sigma) \equiv \delta(\Sigma)$$

Defecto cónico (D-2) dim \leftrightarrow infinitos conos 2 dim (cerca de la singularidad)

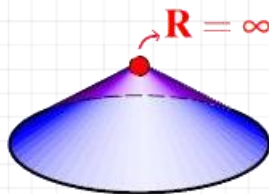


**¿Cómo
trabajamos
con ellos?**

Mecanismos de Regularización

PROBLEMA

La curvatura es infinita en el ápice



Matemáticamente no es trabajable.

SOLUCIÓN

Regularizar el bloque de la métrica que contiene al defecto cónico.

Estudiaremos 2 mecanismos de regularización: **Geométrica** y con **función regularizadora**.

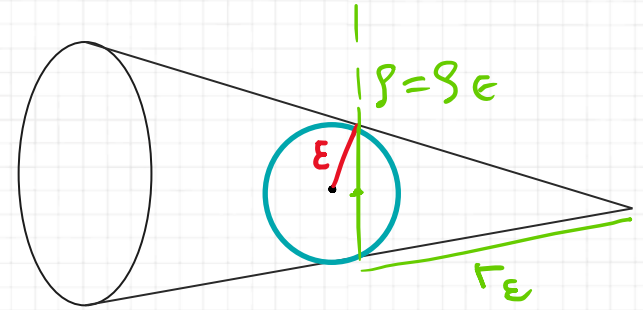
Debemos describir la geometría del cono en término de funciones finitas. Esto es lo se conoce por **regularización**.

Regularización Geométrica

Se reemplaza la geometría del cono, a partir de un $\rho = \rho_\epsilon$ por la de una semiesfera.

Naturalmente, esto divide a la métrica en dos secciones (ignoraremos el factor conforme)

$$ds^2 = \begin{cases} (dr^2 + r^2 d\phi^2) & \text{si } r_\epsilon > r \\ (d\theta^2 + \sin^2(\theta))d\Phi^2 & \text{si } r_\epsilon \leq r \end{cases}$$



La transición entre el cono y la esfera es suave.

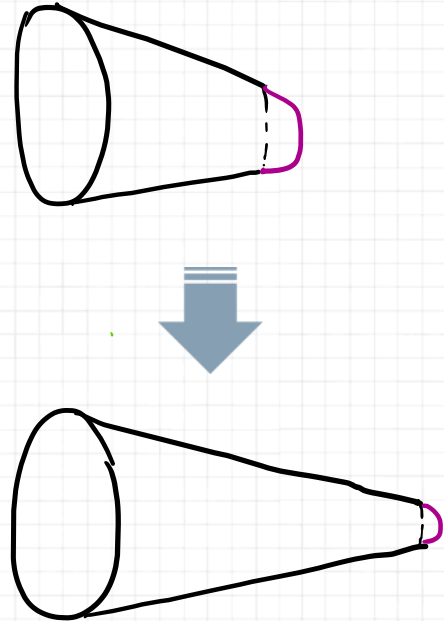
Regularización Geométrica

Se encuentra R a través del tensor de Riemann $R^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$, el se construye con símbolos de Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}(g)$.

La separación de la métrica hace que la **curvatura escalar** también esté definida por bloques.

$$R = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } r_{\varepsilon} > r \\ \frac{2}{\varepsilon^2} & \text{si } r_{\varepsilon} \leq r \end{cases}$$

Si se tiende $\varepsilon \rightarrow \mathbf{0}$, se recuperará la forma del cono.



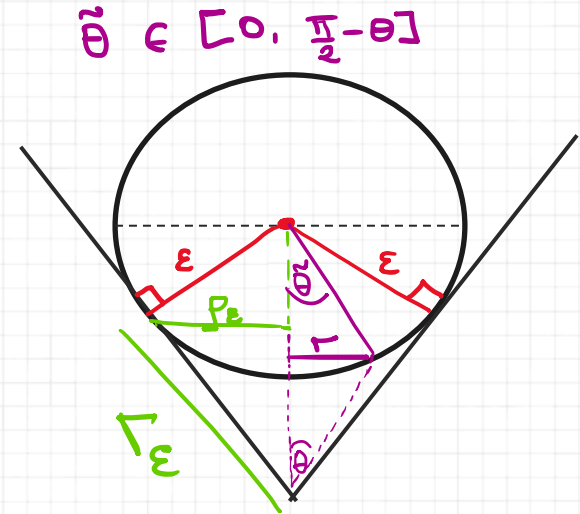
Regularización Geométrica

Para saber la forma explícita de R cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, integraremos sobre su dominio utilizando a una función de prueba $\Psi(\rho, \varphi)$.

$$\int dA R \Psi(r, \varphi) = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} d\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \Psi(r = \varepsilon \sin \tilde{\theta})$$

$$\rightarrow 4\pi\alpha\Psi(r=0) \quad \rightarrow \quad \text{¡} R = 4\pi\alpha\delta^2(\vec{r}) \text{!}$$

Pro del método:
**Altamente
intuitivo**



Contra del método:
**No generalizable a
D dim**

Reg. mediante funciones: Cono bidimensional

Se introduce una **función regularizadora** $u(x)$ en la métrica, dependiente de un parámetro ε .

La curvatura estará dividida en un bloque singular y otro regular

↪ Reintroducimos el factor conforme.

$$ds^2 = e^\sigma [u(x) dr^2 + r^2 d\varphi^2]$$

$$R = e^{-\sigma} [R_\alpha + R_{reg}] \quad \rightarrow \quad R = e^{-\sigma} \left[\underbrace{\frac{u'}{u^2 r}}_{4\pi\alpha\delta^2(\vec{r})} - \square \sigma \right] \quad \text{Cono 2-dim}$$

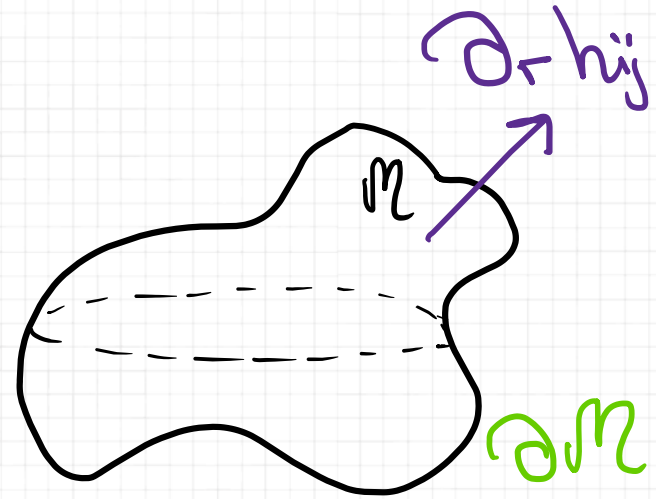
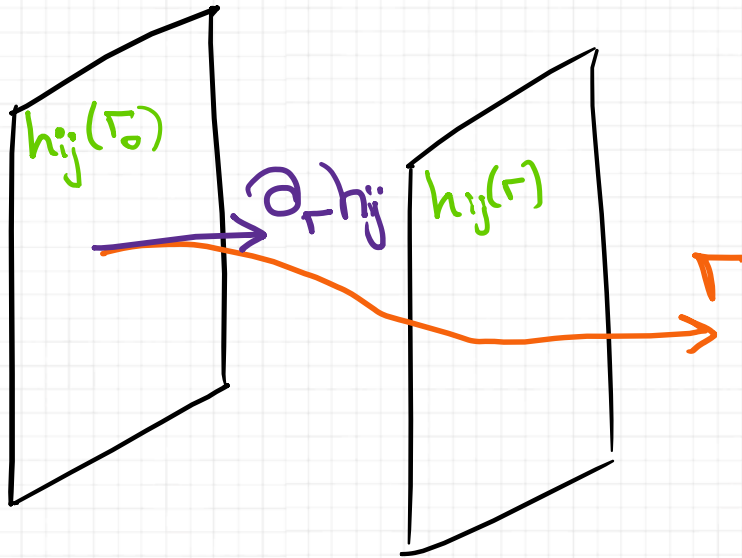
Reg. mediante funciones: Integral D dimensional

La integral de curvatura D dim de una variedad en presencia de un cono 2 dim será

$$\int_{\mathcal{M}_\alpha} d^D x \sqrt{|g|} R = 4\pi \text{Area}(\Sigma) \alpha + \int_{\mathcal{M}_\alpha/\Sigma} d^D x \sqrt{|g|} R$$

Donde \mathcal{M}_α es la variedad completa, Σ la variedad que contiene al defecto y $\mathcal{M}_\alpha/\Sigma$ la variedad sin el defecto.

Foliación en la métrica



r : coordenada normal

$h_{ij}(r)$: métrica inducida en el borde $\partial\mathcal{M}$

$K_{ij}(r)$: derivada normal de la métrica inducida

Origen de la singularidad cónica

Expresemos R en término de sus componentes, cada una en función de la métrica.

$$R = R^{\mu\nu} = R_{r\tau}^{r\tau} + R_{i\tau}^{i\tau}$$

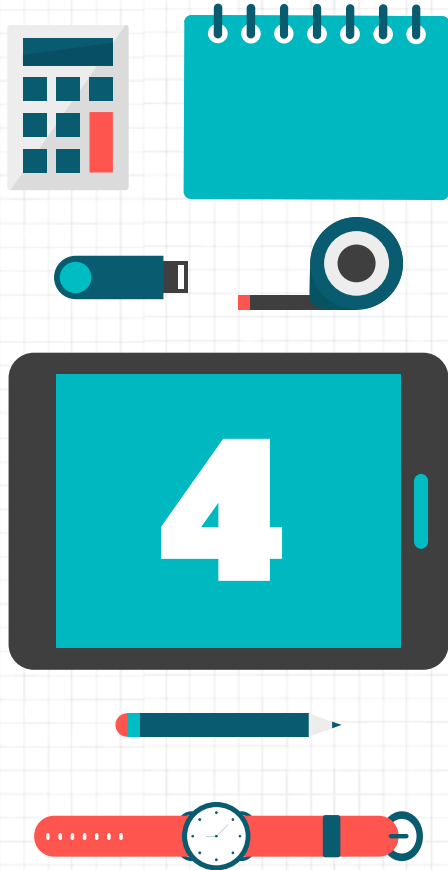
- $R_{r\tau}^{r\tau} = g^{rr} \left[-\frac{1}{2} g^{\tau\tau} \partial_r \partial_r g_{\tau\tau} + (\partial_r g^{\tau\tau})(\partial_r g_{\tau\tau}) + \frac{1}{4} g^{\tau\tau} g^{rr} (\partial_r g_{\tau\tau})(\partial_r g_{rr}) - \frac{1}{4} g^{\tau\tau} g^{\tau\tau} (\partial_r g_{\tau\tau})(\partial_r g_{\tau\tau}) \right]$

¡Segunda derivada normal en la métrica!

Se puede mostrar que esta componente es divergente si $r \rightarrow 0$

- $R_{i\tau}^{i\tau} = -\frac{1}{4} h^{im} h^{rr} (\partial_r h_{im})(\partial_r h_{\tau\tau})$ Esta componente es finita

El defecto cónico solo se alberga en las 2das derivadas normales de la métrica



**¿Cómo
aplicarlos
al agujero
negro?**

Objetivo

Relacionar al déficit angular con la entropía del agujero negro



Relacionar la integral de curvatura con la entropía del agujero negro

¡Equivalentes!

Termodinámica del agujero negro

Queremos hallar

Temperatura Ag. Negro

Entropía Ag. Negro



Z_E

Necesitaremos encontrar la F. de Partición euclídea del Ag. Negro

$$Z_{QFT} = \int [d\Phi] e^{iI[\Phi]} \sim$$

$$Z_{class} = e^{iI_{class}[\Phi]}$$



¡No es Euclídea! Debemos transformar la acción.

Termodinámica del agujero negro

Rotación de Wick

$$t \rightarrow i\tau$$

$$-dt^2 \rightarrow +d\tau^2$$

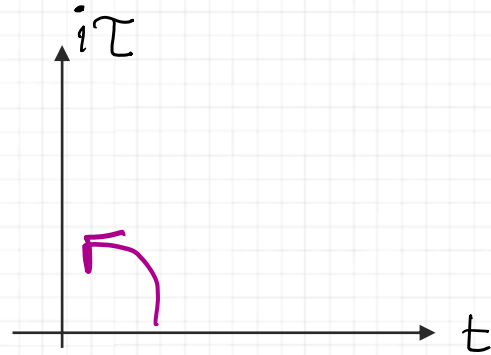
¡Ahora es periódico!

Preludio:

$$I_{class} = \int dt L \Rightarrow I_E = \int_0^\beta d\tau L_E = \beta L_E$$

$$Z_{class} = e^{i I_{class}[\Phi]} \Rightarrow Z_E = e^{-\beta L_E} = e^{-\mathcal{I}_E}$$

Periodo de tiempo Euclideo $\beta = \frac{1}{T}$



Esto solo puede realizarse si L_E es estacionario $\Leftrightarrow \partial_\tau L_E = 0$

Termodinámica del agujero negro

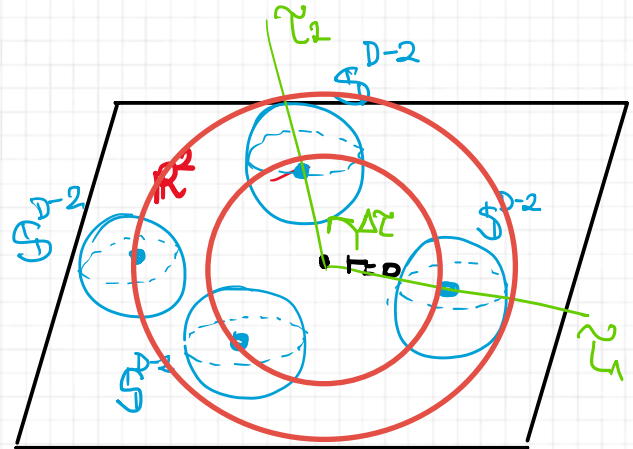
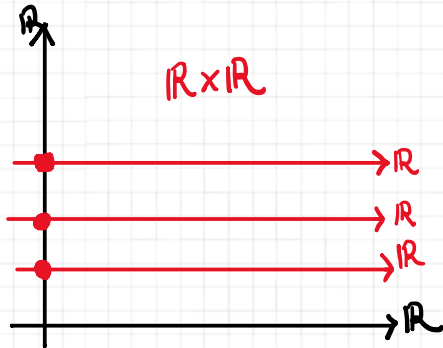
Tal que la variedad, cercana a la singularidad cónica, podrá descomponerse entonces como

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \times S^{D-2}$$

Plano polar euclideo (r, τ)

$(D-2)$ - Esfera de radio r_h

¿Cómo se visualiza el producto directo?



Termodinámica del agujero negro

Ahora que el agujero negro es euclídeo, podremos definir sus relaciones termodinámicas

1ra y 2da ley Termodinámica

$$\delta M = T\delta S + \Phi_e \delta Q + \Omega \delta J$$

Entropía de Bekenstein Hawking

$$S_{BH} = \frac{A}{4G}$$

A : Área del horizonte de eventos

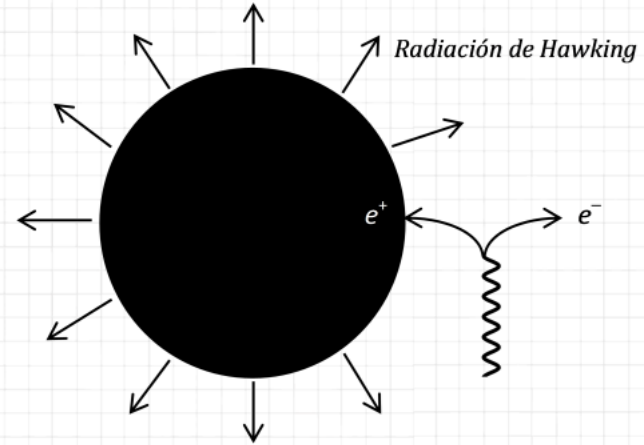
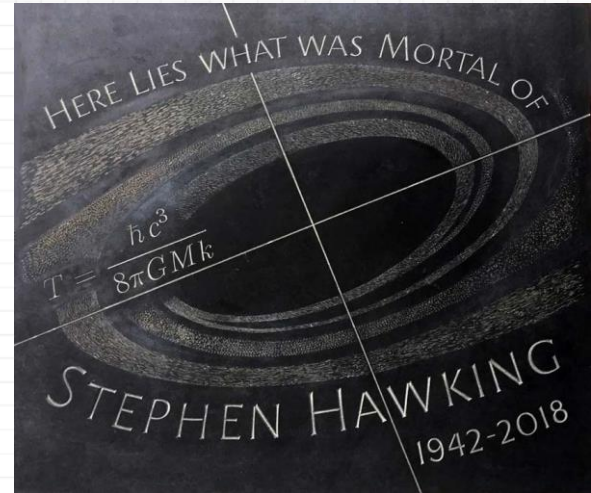


Imagen por cortesía de Jorge Pinochet

Termodinámica del agujero negro

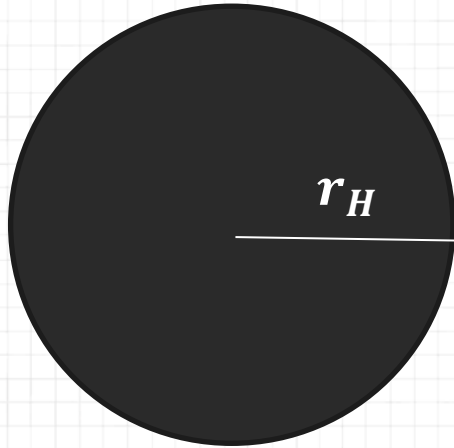
Temperatura de Hawking

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B}$$



Tumba de Stephen Hawking en Westminster Abbey, Londres

Geometría del AN en presencia de defecto



r_H : Radio del horizonte

Métrica de un agujero negro maximalmente simétrico.

$$ds^2 = f(r)^2 d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(r)^2} + r^2 d\Omega^2, \quad f(r_H)^2 = 0$$

Si tomamos un radio infinitesimalmente mayor


$$r = r_H + \epsilon \rightarrow f(r)^2 = \cancel{f(r_H)^2} + \epsilon [f(r)^2]'_{r=r_\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$dr = d\epsilon$$

$$ds^2 = \epsilon [f(r)^2]'_{r=r_\epsilon} d\tau^2 + \frac{d\epsilon^2}{\epsilon [f(r)^2]'_{r=r_\epsilon}} + r_H^2 d\Omega^2, \quad \equiv dg^2$$

Geometría del AN en presencia de defecto

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \frac{1}{4} [f(r)^2]'_{r=r_\epsilon} d\tau^2 + r_H^2 d\Omega^2$$

 ¡ PLANO POLAR !

Gracias a que el tiempo euclideo es un ángulo, se puede hacer la relación de coordenadas

$$\frac{1}{2} \sqrt{[f(r)^2]'_{r=r_\epsilon}} d\tau = d\varphi \rightarrow \varphi \in [0, 2\pi(1 - \alpha)]$$

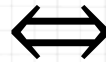
Geometría del AN en presencia de defecto

Recordemos que

$$\int_0^\beta d\tau = \beta = \frac{1}{T}$$

$$\rightarrow \int_0^\beta d\tau = \frac{2}{\sqrt{[f(r)^2]'_{r=r_\epsilon}}} \int_0^{2\pi(1-\alpha)} d\varphi = \beta$$

$$\frac{4\pi(1-\alpha)}{\sqrt{[f(r)^2]'_{r=r_\epsilon}}} = \beta$$



$$\frac{\sqrt{[f(r)^2]'_{r=r_\epsilon}}}{4\pi(1-\alpha)} = T$$

si $\alpha=0$,
tendremos
 \uparrow T_H

Geometría del AN en presencia de defecto

Por el otro lado, la entropía definida en mecánica estadística viene dada por la función de partición Z_E y la temperatura $\beta = \frac{1}{T}$ como

$$S = \left(-\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + 1\right) \ln Z_E$$

$\nearrow e^{-I_E}$
 $= -I_E$

Y considerando que $\frac{4\pi(1-\alpha)}{\sqrt{[f(r)^2]_{r=r_\epsilon}}} = \beta$ podemos reescribir S en términos de α

$$S = \left((1-\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} - 1\right) I_E$$

Si se tiende $\alpha \rightarrow 0$, se obtendrá S_{BH}

Geometría del AN en presencia de defecto

Otra forma que nos interesará encontrar la entropía será a través de la integral de curvatura.

Definimos la **Acción euclidea de Einstein-Hilbert** como

$$I_{EH_E} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}_\alpha} d^D x \sqrt{g_E} R = \frac{1}{4G} \alpha \text{Area}(\Sigma) + \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}_{\alpha/\Sigma}} d^D x \sqrt{g_E} R$$

Si variamos esta acción haciendo variar el área tendremos

¡Son variables conjugadas!

$$i \quad \delta I_{EH_E} = \frac{1}{4G} \alpha \delta \text{Area}(\Sigma) = \alpha \delta S \quad ! \Rightarrow$$

$$\frac{\delta I_{EH_E}}{\delta S} = \alpha$$

Comentarios finales

$S \iff \alpha$ Variables conjugadas

Desafío: Estudiar $R^n, n \geq 3$

¿ $R^n, n \geq 3$ en AN ?

- Ryu, Takayanagi
- Dong, Camps.

Referencias

- [1] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli “Black Hole Entropy and the Dimensional Continuation of the Gauss-Bonnet Theorem” Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 957
- [2] D.V. Fursaev, S.N. Solodukhin “On the Description of the Riemannian Geometry in the Presence of Conical Defects” Phys. Rev. D 52 (1995) 2133
- [3] A. Lewkowycz, J. Maldacena “Generalized gravitational entropy” JHEP 08 (2013) 090

Agradecimientos

- Al proyecto FONDECYT N°1190533 "Black holes and asymptotic symmetries", VRIEA-PUCV Grant N°123.764, y ANID/ACT210100 ANILLO "Holography and its applications to high energy physics, quantum gravity and condensed matter systems", por becar mi trabajo este semestre.

¡Gracias por escuchar!

¿Tienes preguntas? 😊

CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, including icons by **Flaticon**, infographics & images by **Freepik**

